Concours Centrale - Supélec ***1993***

Épreuve : MATHEMATIQUES I — Option TA

L'objet du problème est l'étude, par différentes méthodes, des solutions réelles de l'équation différentielle (E) :

$$4(1+x^2)y'' + 12xy' + 3y = 0.$$

On rappelle que, pour tout (x_0, y_0, y'_0) de $\mathbb{R}^3$, (E) admet une solution unique f qui est définie sur $\mathbb{R}$ et vérifie les deux égalités : $y_0 = f(x_0)$, $y'_0 = f'(x_0)$. En particulier, on désigne par f_1 et f_2 les solutions définies respectivement par : $f_1(0) = 1$, $f'_1(0) = 0$ et $f_2(0) = 0$, $f'_2(0) = 1$.

Tout résultat d'une question, même non démontré, pourra être utilisé dans les questions suivantes.

Partie I

Dans cette partie on étudie les solutions de (E) développables en série entière dans un intervalle $]-R, R[$, $R > 0$.

I.1) Pour tout entier $n \geq 0$, on note $a_n x^n$ le terme général d'une série entière dont la somme définit une solution de (E) dans l'intervalle ouvert de convergence.

a) Écrire la relation de récurrence qui doit être vérifiée par les coefficients a_n et exprimer ces coefficients à l'aide de a_0 et a_1.

b) Quel est le rayon de convergence R de ces séries entières, lorsque les coefficients ne sont pas tous nuls ?

c) En déduire que f_1 et f_2 sont développables en série entière dans l'intervalle $]-R, R[$.

I.2) On suppose $0 < x < 1$.

a) Écrire un algorithme permettant de calculer $f_1(x)$ avec une précision donnée.

b) En déduire une valeur approchée de $f_1(1/2)$ avec une erreur inférieure en valeur absolue à 10^{-6}. On indiquera le nombre de termes utilisés du développement en série.

Partie II

Dans cette partie, on calcule l'intégrale

$$\int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt,$$

en utilisant les intégrales de Wallis, définies pour tout entier $n \geq 0$ par :

$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos\theta)^n d\theta$$

On admettra sans démonstration l'égalité $nI_n = (n-1)I_{n-2}$, valable pour tout entier $n \geq 2$.

II.1)

a) Démontrer, pour tout entier $n \geq 0$, l'égalité $(n+1)I_{n+1}I_n = \frac{\pi}{2}$.

b) En déduire la limite de la suite $(\sqrt{n}I_n)_{n\geq 0}$.

II.2) On suppose l'entier n strictement positif.

a) Montrer que, pour tout réel $u \geq -n$, on a : $(1+\frac{u}{n})^n \leq e^u$.

b) En déduire que, pour tout réel t, tel que $0 \leq t \leq \sqrt{n}$, on a :

$$(1-\frac{t^2}{n})^n \leq e^{-t^2} \leq \frac{1}{(1+\frac{t^2}{n})^n}.$$

II.3)

a) Déterminer un encadrement de : $\int_0^{\sqrt{n}} e^{-t^2} dt$ par deux intégrales qui s'expriment à l'aide de I_{2n-2} et I_{2n+1}.

b) En déduire la valeur numérique c_0 de

$$\int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt.$$

Partie III

Pour tout x réel, on pose :

$$A(x) = \int_0^{+\infty} e^{-t^2} \cos(xt^2)\, dt$$

$$B(x) = \int_0^{+\infty} e^{-t^2} \sin(xt^2)\, dt$$

$$C(x) = \int_0^{+\infty} e^{-(1-ix)t^2} dt$$

III.1) Montrer qu'on définit ainsi trois fonctions A, B et C de la variable réelle x.

III.2) On considère la suite $(C_n)_{n \geq 1}$ de fonctions complexes de la variable réelle x, définie par :

$$C_n(x) = \int_0^n e^{-(1-ix)t^2} dt.$$

a) Montrer que la suite $(C_n)_{n \geq 1}$ converge uniformément sur $\mathbb{R}$ vers la fonction C.

b) Montrer que les fonctions C_n, $n \geq 1$, sont dérivables sur $\mathbb{R}$ et que la suite $(C'_n)_{n \geq 1}$ de leurs dérivées converge uniformément sur $\mathbb{R}$.

c) En déduire que la fonction C est dérivable et que l'on a, pour tout x réel,

$$C'(x) = \frac{i}{2(1-ix)} C(x).$$

III.3) Calculer $C^2(x)$, à l'aide de la constante c_0, en intégrant une équation différentielle linéaire du premier ordre.

On pose, jusqu'à la fin du problème, $\theta = \text{Arctan}\, x$.

III.4) Calculer $C(x)$, $A(x)$ et $B(x)$ à l'aide de c_0 et de θ.

Partie IV

IV.1) En utilisant la relation

$$C'(x) = \frac{i}{2(1-ix)} C(x),$$

montrer que la fonction C est une solution complexe de (E). En déduire que A et B sont deux solutions réelles de (E).

IV.2) On pose $F_1(\theta) = f_1(\tan\theta)$ et $F_2(\theta) = f_2(\tan\theta)$.

a) Montrer que $F_1(\theta) = \sqrt{\cos\theta}\cos(\theta/2)$ et $F_2(\theta) = 2\sqrt{\cos\theta}\sin(\theta/2)$.

b) En utilisant F_1, vérifier la valeur approchée de $f_1(1/2)$ obtenue à la fin de la première partie.

IV.3) En utilisant la variable θ, représenter graphiquement, dans un repère orthonormal, les variations sur $\mathbb{R}$ des fonctions

$$f_1 : x \mapsto f_1(x) \quad \text{et} \quad f_2 : x \mapsto f_2(x).$$

IV.4)

a) Exprimer en fonction de θ la solution f de (E) définie par $f(0) = 1$ et

$$f'(0) = \frac{1}{2}\tan\alpha$$

où α est un réel appartenant à $]-\pi/2, \pi/2[$. Comment se déduit de f la solution g définie par $g(0) = 1$ et $g'(0) = -1/2\tan\alpha$?

On suppose $0 < \alpha < \pi/2$.

b) Pour quelles valeurs de α, la fonction f admet-elle une racine ? Expliciter cette racine.

c) En utilisant la variable θ, représenter graphiquement, dans un repère orthonormal, les variations sur $\mathbb{R}$ de la fonction $f : x \mapsto f(x)$.

••• FIN •••